

Cohomologie de Kayad et structure spectrale des noyaux nucléaires

Une formulation simpliciale du lien entre stabilité, cycles locaux et nombres magiques

Dr. Mohamed Nour Kayad

Laboratoire de Physique Mathématique et Topologie Algébrique Discrète

Résumé

Nous introduisons un cadre topologique discret, baptisé **Cohomologie de Kayad**, destiné à modéliser la stabilité nucléaire à partir d'un complexe simplicial abstrait représentant les canaux d'interaction des nucléons. L'axiome central consiste à traduire une contrainte locale de fermeture triangulaire, formalisée par une règle de circulation nulle, en une condition de cocycle sur les arêtes orientées du réseau. L'opérateur spectral fondamental du modèle, le Laplacien de Hodge-Kayad, relie les sauts de stabilité macroscopiques — les nombres magiques — à la dimension de l'espace de cohomologie de premier ordre. Nous développons également une extension hermitienne complexe de ce formalisme, introduisant un champ de jauge discret $U(1)$ afin de représenter une brisure de symétrie chirale effective pour les noyaux lourds.

1 Introduction

La structure fine du noyau atomique est traditionnellement décrite par le modèle en couches, dans lequel les nombres magiques émergent de l'occupation successive des niveaux quantiques et du couplage spin-orbite. Bien que ce cadre soit remarquablement prédictif, il laisse ouverte la question d'une interprétation géométrique unifiée de la stabilité.

Le présent manuscrit propose une reformulation en géométrie discrète et en cohomologie simpliciale. Dans ce paradigme, le noyau atomique est traité comme un réseau d'interactions dont la cohérence globale est gouvernée par l'annulation de certaines circulations locales. La stabilité n'est alors plus seulement énergétique, mais topologique.

2 Complexe simplicial nucléaire

Soit K un complexe simplicial abstrait modélisant un système de N nucléons. La structure est décrite par ses simplexes de faible dimension :

- Les 0-simplexes $v_i \in K_0$ représentent les nœuds d'interaction ou états élémentaires.
- Les 1-simplexes $e_{ij} = [v_i, v_j] \in K_1$ représentent les canaux de transition orientés entre deux états.
- Les 2-simplexes $\sigma_{ijk} = [v_i, v_j, v_k] \in K_2$ représentent les unités minimales de cohérence collective.

L'orientation impose l'antisymétrie usuelle : $e_{ji} = -e_{ij}$. Une configuration de couplage est donc encodée par un réseau orienté de cochaînes.

3 Co-frontière et cohomologie

On considère l'espace des 1-cochaînes réelles $C^1(K, \mathbb{R})$, dont un élément X associe à chaque arête orientée une amplitude X_{ij} .

L'opérateur de co-frontière

$$d_1 : C^1(K, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(K, \mathbb{R})$$

mesure la circulation de X sur les frontières des 2-simplexes. Pour un triangle σ_{ijk} , la condition

$$(d_1 X)(\sigma_{ijk}) = 0$$

exprime l'annulation de la circulation locale.

Les configurations vérifiant cette relation sont des **1-cocycles**. Les configurations triviales, obtenues par différence de potentiels aux sommets, sont les **1-cobords**, c'est-à-dire les éléments de $\text{im}(d_0)$, où

$$d_0 : C^0(K, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(K, \mathbb{R}).$$

L'espace de cohomologie de premier ordre est alors

$$H^1(K, \mathbb{R}) = \ker(d_1) / \text{im}(d_0).$$

Il mesure les obstructions globales à l'élimination des flux par un potentiel local.

4 Matrices d'incidence et Laplacien

Pour rendre le modèle calculable, on écrit les opérateurs sous forme matricielle. Soit E le nombre d'arêtes actives et T le nombre de triangles. La co-frontière d_1 est représentée par une matrice d'incidence triangulaire

$$\mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{T \times E}.$$

La contrainte de fermeture simpliciale s'écrit alors

$$\mathbf{D}_K \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Le Laplacien de Hodge-Kayad de premier ordre agit sur les 1-cochaînes :

$$\Delta_{\text{Kayad}} = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_0^\top + \mathbf{D}_K^\top \mathbf{D}_K.$$

Cet opérateur est symétrique réel et semi-défini positif. Son noyau est canoniquement relié à la cohomologie :

$$\ker(\Delta_{\text{Kayad}}) \simeq H^1(K, \mathbb{R}).$$

La multiplicité de la valeur propre nulle fournit donc un invariant topologique central du modèle.

5 Formulation variationnelle

À toute configuration d'interaction \mathbf{X} on associe l'énergie

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X}, \Delta_{\text{Kayad}} \mathbf{X} \rangle.$$

Comme Δ_{Kayad} est positive semi-définie, on a $\mathcal{E}(\mathbf{X}) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mathbf{X} \in \ker(\Delta_{\text{Kayad}})$.

Dans cette lecture, les nombres magiques correspondent à des configurations où la dimension du noyau augmente brutalement, créant un puits de stabilité topologique. La rigidité du système n'est alors plus attribuée à une simple minimisation énergétique continue, mais à un saut discret de structure cohomologique.

6 Cas élémentaire à deux nœuds

Le cas $M = 2$ constitue le plus petit système orienté non trivial. Il ne contient pas de 2-simplexe, ce qui interdit toute circulation triangulaire. Le Laplacien y est strictement positif sur l'espace des 1-cochaînes non nulles, d'où

$$\ker(\Delta_{\text{Kayad}}) = \{0\}.$$

Ce résultat montre que le système à deux nœuds ne porte pas de mode cohomologique stable de premier ordre. Il joue cependant un rôle fondamental comme brique de base pour la construction de structures plus riches.

7 Complexe triangulaire

Le triangle orienté fournit le premier exemple où la co-frontière peut être évaluée explicitement. Si la 2-face est présente, le cycle périphérique devient un bord et ne définit donc pas nécessairement une classe de cohomologie non triviale.

Cette distinction est essentielle : dans la Cohomologie de Kayad, un cycle fermé n'est pas automatiquement un invariant de stabilité. Une véritable protection topologique exige une obstruction globale à l'annulation par un gradient local.

8 Extension hermitienne complexe

Pour les noyaux lourds, nous introduisons une extension hermitienne du modèle. Les amplitudes de liaison deviennent complexes, avec une phase locale θ_{ij} codant un effet de jauge discret $U(1)$.

On remplace alors les cochaînes réelles par des cochaînes complexes, et l'opérateur de co-frontière devient

$$d_1(\theta) : C^1(K, \mathbb{C}) \rightarrow C^2(K, \mathbb{C}).$$

Le Laplacien complexe s'écrit

$$\Delta_{\text{Kayad}}(\theta) = \mathbf{D}_0(\theta)\mathbf{D}_0(\theta)^\dagger + \mathbf{D}_K(\theta)^\dagger\mathbf{D}_K(\theta).$$

Cet opérateur est hermitien et semi-défini positif, donc son spectre reste réel. Les phases θ_{ij} lèvent certaines dégénérescences et modifient la structure du noyau.

Dans cette version, les grands nombres magiques, notamment 50, 82 et 126, s'interprètent comme des configurations critiques de phase où la structure spectrale retrouve une stabilité remarquable malgré la complexité accrue des interactions.

9 Interprétation physique

Le modèle en couches explique les nombres magiques par la structure des niveaux quantiques et le couplage spin-orbite. Le cadre proposé ici reformule cette intuition en langage topologique : la stabilité nucléaire résulte de la fermeture globale d'un réseau d'interactions soumis à des contraintes locales.

L'intérêt de ce point de vue est double. D'une part, il fournit un formalisme unifié pour représenter les flux d'interaction. D'autre part, il ouvre la voie à une analyse spectrale explicite des configurations stables sur des complexes finis. Les nombres magiques deviennent alors des seuils de rigidité topologique plutôt que de simples accumulations d'occupation.

10 Conclusion

Nous avons formulé un cadre simplicial, cohomologique et spectral pour décrire la stabilité nucléaire. La Cohomologie de Kayad transforme une règle locale de fermeture en un invariant global mesuré par le noyau d'un Laplacien de Hodge discret. L'extension hermitienne complexe permet en outre d'introduire des phases effectives adaptées aux noyaux lourds.

Ce formalisme constitue une base mathématique cohérente pour l'étude de la structure nucléaire via des complexes simpliciaux, des opérateurs spectraux et des invariants topologiques. Il fournit une interprétation géométrique des nombres magiques et suggère des prolongements naturels vers des calculs explicites sur petits systèmes, des modèles pondérés et des géométries de jauge discrètes.

Références

1. Goeppert-Mayer, M., & Jensen, J. H. D. Travaux fondateurs sur le modèle en couches nucléaire.
2. Haxel, O., Jensen, J. H. D., & Suess, H. E. *On the "Magic Numbers" in Nuclear Structure*.
3. Munkres, J. R. *Elements of Algebraic Topology*.
4. Forman, R. *Combinatorial Hodge Theory and Vector Fields on Cellular Complexes*.